

教育部教學實踐研究計畫成果報告

Project Report for MOE Teaching Practice Research Program

計畫編號/Project Number：PMS1122046

學門專案分類/Division：數理

計畫年度：112學年度一年期111學年度多年期

執行期間/Funding Period：2023.08.01 –2024.07.31

數學核心計算能力之教學方法探討

(微積分一／微積分二)

計畫主持人(Principal Investigator)：張瑞恩

執行機構及系所(Institution/Department)：國立中正大學／數學系

成果報告公開日期：立即公開延後公開

繳交報告日期(Report Submission Date)：2024 年 7 月 19 日

研究動機與目的(Research Motive and Purpose)

扎實的計算能力是數學應用以及數學理論的基礎。有些學生雖然有問題處理的概念，但並沒有計算能力支撐，提出初步的想法之後就會卡在無法處理計算的部分，即使進入計算，也對自己的過程沒有信心，無法獨力將數學推導整合成數學推論。這樣的狀況，造成許多學生即使花了許多時間來讀數學，仍然無法得到可以解決具體問題的能力，這在數學的教育中是相當可惜的。

在教學的經驗中，常常會有教導操作型計算內容的機會。但是會發現學生表現出許多學習的壞習慣，像是在聽老師的習題講解時只是抄筆記沒有思考，更誇張的狀況可能連筆和筆記本都沒有帶到教室。即使上課預留時間讓學生現場解題，也常發現留給學生的時間學生就只是放空沒有動手做。最近的教學中有了新的突破，發現自己除了留時間給學生以外，需要到台下一個一個看學生操作的狀況，一方面近距離給予學生心理壓力，另一方面也可以第一時間注意到學生們操作的困難點在哪適時給予提示。這樣操作之後學生們的參與度有明顯的提升，但是感覺還有更多進步的空間。希望能夠更有系統的思考有哪些因素能讓學生最有效的學習基本的數學計算。

研究問題(Research Question)

本計畫致力於研究以下影響操作與練習的狀況的關鍵因素。以下為這些關鍵因素目前我的觀察以及研究中可以探討的改進方向。

- 「習題示範與講解」：傳統的教學模式是老師在台上講解，學生在台下抄筆記。但如果缺乏合適的課程設計，學生們可能只停留在把黑板的東西抄下來卻沒有思考與動腦的狀況。和理論的證明比起來，學生們對於台上講解操作性的東西比較能夠吸收，但是可能在講解時學生覺得聽懂了，等到自己一個人做功課的時候卻發現不知道如何做也看不懂自己筆記抄了什麼。

我在之前做出改進，把所有教學內容投影片化，並把各個題目的過程都文字化作為課程講義。一方面藉由投影片清楚的呈現，加上用黑板推導展現解題步驟與思路，讓學生可以很視覺化的抓到重點。學生們回去有比較清楚的資料可以複習課程。

計畫目標：設計搭配各個主題的示範習題，並評估難度是否適當。

- 「課堂中的習題演練」：之前課堂上單純留時間給學生計算習題，觀察到學生有可能覺得回去再念，失去了馬上練習整合的機會。下去近距離一個一個觀察學生的狀況之後，有了一些改善。學生們會因為被老師關心的心理壓力而當場嘗試做題目，這也影響之後

的課堂氣氛與文化，讓學生們習慣來上課就是要現場練習，之後大家也會在練習時間與身邊的同學討論。另一個好處是可以現場發現學生們面對的困難，之前就有自己覺得應該很容易的習題，大家在操作的第一步就卡住了。現場給予學生提示可以幫助學生跨過卡住的部分，避免學生卡在沒有想法的挫折感和注意力發散狀態，並繼續把其他的部分操作完成。

但是另一方面，要能夠成功將數學使用到其他科目，學生需要具備將許多不同技巧整合起來已完成一個大型計算或推論的能力。提示雖然有助於學生們的參與度和成就感，但也可能造成學生們依賴提示的框架，缺少自己整合各種數學技巧的能力。該如何評估什麼是學生需要的框架，並完成最後終極的讓學生有獨立使用數學工具的能力與信心，是在設計提示時需要注意的地方。

計畫目標：設計合適的學生能力檢測流程，以及早發現學生們的困難點與老師教學的盲點。

計畫目標：設計合適的處理問題提示框架，並逐步遞減提示的密度，使學生在過程中同時兼顧成就感與整合使用數學技巧的能力。

- 「學習單與講義」：在課程中會觀察到有些學生沒有準備筆記與筆來課堂，在計算與練習時會隨便找一張廢紙或使用課本的邊緣，這不是一個好的計算練習空間。這也與另外一個問題相關，有些學生的數學式子寫得相當破碎，造成之後自己檢查的困難，這樣的式子也無法和用來向別人表達自己的想法。之前的課程設計尚未加入學習單，一直考慮引入學習單來引導學生們抓到課程中的重點，並建立良好計算寫作以及筆記寫作習慣。以及抓重點。

計畫目標：搭配課程講解以及習題演練部分設計合適的學習單，需要同時考慮提示與輔助框架的設計。學習單同時也會用在研究計畫中來評量學生計算式子寫作與表達還有數學能力的進步程度。

文獻探討(Literature Review)

- 學習方法相關：

在教育理論中有許多對於學習方法的探討，在這裡主要敘述與我的研究主題最相關的幾個並它們這次教材設計的關聯。

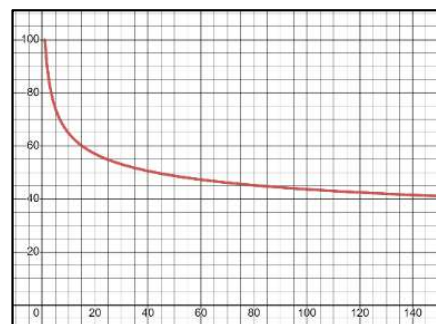
第一個是「觀察學習」，心理學家表示，靈長類動物有「鏡像神經元」，在執行某動作或觀察他人執行動作時都會激活類似的神經元。人在觀察的過程中，看見的不只是行為，而是幾乎親身經驗了這個行為並在內心重現他人的情緒與感受。這樣的觀察並代入的能力是學習的基礎。但是這樣的學習模式用在數學計算的學習上效率並不佳。有以下幾個缺點：第一，對於複雜的行為，觀察與模仿的難度相當高，學生也無法主動找到觀察的重點。第二則是抽象的內容很難透過模仿來學習，能夠複製一樣的行為不等同於理解，但數學除了計算的行為以外，更重要的需要去理解背後為何做這樣的計算。

與本計畫更為相關的是「範例學習」，由德國教育家Martin Wagenschein等人提出。老師提供解決問題的模板，初學者依循老師提供的步驟，藉由模仿學會如何處理相似的問題。和前面的模仿學習比起來，範例學習進一步把複雜的行為拆解為多個步驟，並加上老師在進行各個步驟時背後的思維。藉由範例的設計以及專家的引導，可以降低認知負荷，讓學習者能夠聚焦在對於學習最重要的資訊中。這方面的研究中也給出了進行習題示範的一些重要的思考方向，像是需要在原本的計算目標中訂出適合的子目標，在過程中提供需要的數學背景工具以降低尋找工具的困難，減少問題的複雜度以免讓學習者分心。雖然這方面的設計是本計畫探討的目標，但也需要注意範例學習的缺點。範例學習可能會降低學習者創新與主動思考的能力而仰賴範例與模板的操作，因此在設計中需要逐漸減少提示框架，以期達到最後讓學生有整合各種數學工具解決大問題的能力。

- 艾賓豪斯的遺忘曲線：

知名的心理學家艾賓豪斯(Hermann Ebbinghaus)提出了以下的遺忘曲線理論，設 t 為學習後經過的時間，以分鐘計算， b 為學習者所記得的內容百分比。則實驗的結果可以用以下的公式描述

$$b = \frac{100 \cdot 1.84}{(\log(t))^{1.25} + 1.84}$$



注意右上的圖橫軸單位是分鐘。以一堂課一小時來說，一開始講述的內容在第一堂課結束時記憶的內容會剩下約44%左右。在第二堂課結束時剩下42%。一天之後剩30%，一個星期後同樣的上課時間記得的內容只剩24%。

之後艾賓豪斯也提出重複學習與上述遺忘曲線的關係，當之前學過的知識再次被學習而把記憶內容拉回到100%後，遞減的速度不像原始公式中的這麼快，會有更長的遞減時間。表示重複學習使得記憶維持較久較不容易衰退。研究也顯示最有效的複習是在記憶曲線急速下降時，也就是即將大量遺忘的時候。因此上課除了講述之外，馬上藉由操作，讓學生經由練習而降低遞減速度，影響學生吸收的品質，本計畫旨在探討如何的課堂操作能將效益最佳化。

教學設計與規劃(Teaching Planning)

i. 教學目標與方法

課程名稱：微積分(一)、微積分(二)

開課系所：數學系

授課對象：多是大二以上重修微積分的學生

學分數：4

教學目標：讓學生掌握極限、微分、積分的能力。進一步的用這些能力做出數學推導以及解決相關的具體問題

教學方法：以講述以及習題演練為主

ii. 各週課程進度與教學空間

實際教學空間：實體教室

課程進度：上學期

	時間表	認知	技能	情意
主題一： 基本函數	Week 1	函數的定義 多項式、三角函 數、指數、對數 等基本函數	各個基本函數求 函數值，計算與 式子的整理	連結高中的數學內容到高等 數學與工程數學中
主題二： 極限	Week 2-3	極限的定義 無窮大的概念	運用基本函數的 操作計算極限	了解在那些問題中我們需要 用到極限運算
主題三： 微分	Week 3-5	微分的定義 隱函數與反函數 的定義	計算各個基本函 數的加減乘除與 合成的微分	微分用數學語言描述「變 化」
主題四：	Week	線性逼近	函數值的逼近	

微分應用	6-8	極值問題 臨界點 函數凹凸性	變化率問題 最佳解 羅必達計算極限 畫出函數圖形	
期中考	Week 9			
主題五： 積分	Week 10-14	定積分的定義 不定積分的定義 微積分基本定理	使用積分技巧計 算各種不定積分	積分用數學語言描述「總 和」
主題六： 積分應用	Week 15-17	曲線長度的定義 曲面面積的定義 極座標	計算長度、面 積、體積 積分的應用	
期末考	Week 18			

下學期

	時間表	認知	技能	情意
主題一： 參數曲線	Week 1-3	參數曲線的定義	參數曲線的長 度、曲率、扭率	參數曲線用於描述行星運動 與變化軌跡
主題二： 多變數微 分	Week 4-8	多變數極限 偏微分、方向導 數，梯度 多變數連鎖律	多變數極限計算 多變數微分計算 應用微分計算關 於變化的問題 多變數極值問題	將描述「變化」的微分語言 推廣到更複雜的空間
期中考	Week 9			
主題三： 多變數積 分	Week 10-12	多變數積分 極座標 柱座標、球座標 變數變換公式	不同座標系下， 積分區域列式 計算多變數積分 轉換積分式子	將描述「總和」的積分語言 推廣到更複雜的空間
主題四： 微分方程	Week 13-16	微分方程的定義 與類型	基本的微分方程 應用於其他問題	許多金融、電路、人口問題 可以轉換成微分方程來得到 數學的回答
期末考	Week 17			

iii. 學生成績考核與學習成效評量工具

成績考核工具：

- 學習單：不占學期成績，每次上課操作並收回批改以了解學生狀況。
- 作業：占學期成績20%。題目類型與學習單類似，希望學生自己應用學習單上的技巧，在沒有提示框架的狀況下解決。
- 小考：四次取三次，占學期成績10%。提醒學生追上階段進度。
- 期中考、期末考：各占學期成績35%。

研究設計與執行方法(Research Methodology)

- 課程前的準備：針對課程學習目標，選取以下題目
 - 第一題做為示範習題
拆解習題步驟至最小單位
有機會可以課前找學生測試拆解是否合適
寫出各步驟詳解至投影片中於課程中講解
 - 第二題為習題演練用
根據習題的步驟，切分成小格設計學習單
習題選取盡可能與第一題相似
 - 第三題為習題演練用
學習單設計移除太仔細的框架
目標讓學生自己列出步驟並整合整個過程
- 課程中：
按照設計使用示範習題與學習單。
在第二題與第三題讓學生在學習單上操作習題
到每個同學身邊看學生狀況並給予個別回應
對於提示框架比較少的第三題，可能有學生無法整合步驟。因為教學的需求，會當場增加提示記錄下來事後分析。
- 課程後：
回收學習單以整理學生們的學習狀況。
根據學生狀況與程度修改後續習題與學習單。
- 期中期末考：
設計純計算題目特別記錄學生成果以分析。
- 學期結束：
設計後測問卷，以了解學生的數學能力的進步以及對教學方法的回饋。

以上是原始的設計，根據教學現場反應後調整的方式與步調整在下節「教學暨研究成果」的部分。

教學暨研究成果(Teaching and Research Outcomes)

● 教學過程與成果

本次計畫中最主要的部份是在課前設計「學習單」以及課堂上的「習題引導」。在執行的過程中同時需要考慮老師本人花的心力與教學效益，以找到合適的備課節奏。這樣才有辦法成為長久可行的教學方式，以下紀錄的是這次備課與課堂教學的過程。

- 在每一堂課之前的任務是設計「學習單」。因為之前多年的微積分教學經驗，已經累積了相當成熟的微積分投影片，也有穩定的教學進度規劃。之前的投影片除了上課使用，也逐年增加更多細節讓解題的內容變的更完整，會在上課之前放在課程網站上讓學生當成上課講義使用。因此這次學習單的設計可以奠基在之前教學進度以及課堂投影的基礎上。

每堂課最前面的十幾二十分鐘，通常會是簡單的複習上次的內容，再來就是進入本堂課主要學習的主題。這些部分的學習目標通常是記得核心的公式，在接下來的課程時間中反覆演練熟悉如何使用。因此學習單最前面的部分會以重點整理填空的方式，讓學生有空間在最明顯的位置寫下這次重要的公式以及操作過程。這些內容也讓後面學生操作習題時，可以方便的在需要時回來查找需要的公式。開始設計一系列的學習單後，這部分其實不太花時間，往往可以從前一份學習單的內容複製貼上整理一下就可以用了。

針對這次研究重點的習題操作過程設計學習單，第一步就是重新審視之前投影片上的習題難度與數量。在實際操作中，有些地方和一開始設計與執行方法不太一樣。原本設計概念第一題會是直接講解示範的題目，也因此會選用中等難度的題目，在過程中會順便講解學生可能犯的錯。但實際操作後，改成第一題找盡可能簡單的題目，直接讓學生練習使用剛教過的公式。在這邊也加入了另一個教學目標：讓學生試著在沒有示範的狀況下，像是按照說明書上的一個步驟接著一個步驟的操作，期待學生能夠有自主學習的能力。在學生都操作過這題之後再到台上做一次清楚的示範並回饋學生過程中遇到的問題。

後面的習題設計和原本的計畫沒有差太多。原本在投影片上的題目，在評估適合後就複製到學習單上排版並預留計算空間。再來拆解習題，列出幾個過程中的階段性目標。一些常見的階段性目標像是先理解題目設定變數、列出各變數的關係、提示過程中需要列出的式子或是需要先算出的部分內容。這些東西也許對於數學能力比較成熟的學生會很自然，甚至不需要一個口令一個動作的讓學生每步都要做。但對於一般的學生來說，學習單的目標還是先放在讓他們把基本動作做扎實。

- 在課堂中，本次計畫最重要的部分是「習題引導」的過程。也就是在課堂上給予學生更多計算習題的時間，要求學生們現場在學習單上面操作，並在這段時間中下去一個一個看學生們操作的過程，根據每個學生不同的狀況立刻給予回饋。

在習題引導的過程中，第一個需要接受學生的思考步調和自己的不一樣。有些時候我覺得剛講過的東西很簡單，學生應該可以馬上開始操作，但是到學生旁邊時才發現學生還在整理前一步的東西或是還在消化吸收以至於沒辦法馬上操作。這時候會先晃去看其他同學的狀況，比較一下是全班同學整體的狀況還是個別的狀況。藉由這樣的機會也能夠評估目前教學的難度是否適合班上學生。

因為近距離的互動，可以清楚知道每個學生的狀況。有些學生思考的很快，挫折容忍度很高，可以放他自由的摸索甚至是嘗試錯誤。但也有些學生對於數學比較恐懼，比較害怕犯錯，對於如何開始如何下一步都會比較遲疑。對於不同學生的思考狀況，想要給提示的時候會擔心是否打斷學生探索的過程，但想要讓學生自己探索時又會擔心學生挫折和空轉過久。這邊就尊重學生的自主性，也覺察自己不可能單純靠觀察就知道學生的狀況，一個比較好的方式是直接問「你需要進一步的提示，還是自己再想一想？」讓學生覺察自己的狀況與需要甚麼樣的幫助。這個部分只有一個例外的部分，就是當學生計算錯誤或操作錯誤時，我會在第一時間提醒學生並改正這個錯誤。雖然計算的正確率也是學習的目標之一，但計算錯誤就會導致整個習題的練習時間空轉，並讓學生感受到更多的挫折感也看不到整體學習的重點。對於學生計算錯誤的回應，後面的部分有更多的教學反思。

在給學生時間操作完一整個習題，並在習題引導過程讓大多數的學生都有不錯的完成度之後，會回到台上完整的操作一遍給學生看。因為學生在自己做時很可能一次只能注意到一個步驟，這邊目標是讓學生可以看到整體的思考大方向與操作流程。視時間的狀況，有時會以加分為條件徵求自願的學生上台做剛才的題目。這樣做的目的是一方面給學生練習在上台做題目與講解的過程中，因為剛才習題引導時順過整個題目，不太會有做錯的狀況，可以向全班報告自己剛才寫出來的正確答案增加信心，也在講解的過程中整合整個題目的操作經驗。對於在台下的學生，也有機會看到不同於老師的思考和表達方式，從而得到不同的思考觀點。這部分偶爾會遇到學生講不清楚或者仍然卡住花太多時間的狀況，導致老師需要額外的回應或甚至重講一遍，但整體而言讓學生上台講題目執行的還滿順利的也會讓課堂比較輕鬆比較有變化一些。

因為這次分配到的微積分班級並不如往常一樣是大一新生班，而是混系班級，並以大二以上重修的学生為主。教學成果比較難與其他班級比較，後面的研究探討主要以質性分析為主。但還是可以在這邊呈現這次教學的數據，以第二學期為例：

- 班級人數，在選課單上是45人。因為學生的特殊性，有許多學生是一選上就因為個

人原因放棄的。這樣的學生會表現在完全沒有參與課程，特別是期中期末缺考，將這樣的學生資料剔除後剩下35位學生。根據學習單的資料，其中有17位是有穩定來參與課程活動與學習的，而另外18位是除了與分數有關的作業、小考、期中、期末以外幾乎不參與實體課堂活動的。以下是全部班上同學、穩定參與以及沒有參與的成績數據。

■ 成績以及及格率

	實際有活動的學生(35)	有穩定參與課程(17)	不參與實體課程(18)
平均	62.21	69.75	55.08
及格率	26/35=0.74	15/17=0.88	11/18=0.61

以上數據的效力除了本身教學方法像是學習單與習題引導對於學生影響外，也同時受到學生的學習動機與認真程度影響。很難以從這些數據有效的支持教學方法對於學生學習狀況的影響。但就我的教學經驗，有穩定的參與課程的學生總平均達到69.75，這已經是相當不錯的學習狀況。

● 學生學習回饋

以下是學生對於教學方式的回應，以不記名網路問卷方式執行。以下題目都以1表示極度不同意，分數愈高表示愈高的同意程度，5表示極度同意。

以下是學習單與「操作型內容」，主要是各個例題的關係。

	1	2	3	4	5	平均
對於「操作類」的內容，像例題。使用學習單能幫助理解。			3	5	5	4.15
和講授的授課方式比起來，學習單在「操作類」的內容效果較好。			3	8	2	3.92
學習單上有足夠的空間讓我計算還有整理自己的思考。		3	3	6	1	3.38
學習單的操作可以幫助我更清楚的記憶上課的內容。		1	1	7	4	4.08
使用學習單的教學模式，可以幫助我回家之後需要更少的時間複習。		1	3	6	3	3.85

以下是學習單與「理論型內容」，像是式子推導以及理論的講解的關係。

	1	2	3	4	5	平均
對於「理論類」的內容，像是公式推導。使用學習單能幫助理解。			2	6	5	4.23
和講授的授課方式比起來，學習單在「理論類」的內容效果較好。		1	3	7	2	3.77

習題引導對於課程學習的效果

	1	2	3	4	5	平均
學習單上的題目難度適中，有助於課程內容理解。			2	9	2	4.00
現場做習題並分別給予習題的指導的方式，能幫助我更好理解課程內容。				7	6	4.46
做習題時，老師能夠針對我的問題給予清楚的回饋。				8	5	4.38
在習題操作時間，有規劃足夠的時間讓我能夠好好思考並操作。			1	9	3	4.15
我可以在習題操作時間從老師那邊得到需要的幫助與回饋。				8	5	4.38
習題做完之後，讓同學上台做題目可以幫助我從同學的觀點再學習一遍。			3	5	5	4.15

教學方式的優點

我覺得很好，因為我是從另一個老師的班過來的上個老師上課我完全聽不懂，現在都聽得懂	操作型的題目自己操作、練習一次可以知道哪邊的解題技巧或者觀念需要加強，但是理論型的提姆通常自己是做不出來的，然後經過老師講解跟推導後基本上很快就可以理解這個部分到底在做什麼，然後再自己抄寫一次可以加強印象	學習單的設計真得很好，不僅僅是在於上課內容，更能當作是一種變相的點名方式，這樣對出席率高的同學來說比較有利（雖然不知道有沒有被拿去算出席率）
學習單能幫助我更好的抓住重點，事後複習也比較簡潔。	可以根據學習單引導，有架構的完成課程、完成學習單會有滿足感	能用表格和有邏輯的方式跟上這堂課的進度，讓我對課程內容能更好的掌握
用desmos讓我更能夠理解我到底在解什麼	有學習單做筆記比較清楚，有時候自己寫會亂掉。	更容易了解上課內容
重點清晰	實際操作幫助我更加深印象	至少寫過一次
上課內容清楚易懂		

建議改進的方向

上傳到網路上的投影片也許可以內容更多更完整，方便課後複習	學習單計算部分空白位太小，常常寫不下	希望學習單能發回來，有時候不確定自己寫在學習單上面的是否正確或來不及更正
學習單預留計算空間有時候不太夠	感覺有些地方有點趕	投影片可以附上當時是課本的哪個章節會比較好一些

● 教師教學反思

對於「學習單」的使用。從前兩題來看，學生普遍認為和傳統純講授的教學方式比起來，學習單更有助於課程內容的理解。但是在下面對於學習單操作的感受，出現了一些少數回應中選2，比較負面的聲音。這部份很可能是因為這次學習單設計與執行方式的問題，將於下一段的建議與省思部分整理改進的空間。這邊先分析學習單對學生學習上的幫助：

- 學生整理資料的能力：在使用之前，許多學生上課可能不帶紙筆，只是單純用聽的，或是上課時一直把投影片與黑板的內容抄下來，卻沒有同時思考這些內容。學習單的設計，省去學生抄寫許多文字的時間，可以把上課時間有效率的用在最需要學生紀錄的部分。另外也可以幫助學生建立如何完整表達思考的習慣。在數學問題中，一開始需要設定哪些變數以及變數之間的關係。學生可能有正確的想法但是表達的不完整不清楚，導致其他人看到學生寫出來的東西沒辦法抓到思路，甚至可能學生之後再回來看自己的筆記卻看不懂自己要寫什麼。藉由學習單可以建立習慣，知道哪些東西記錄下來可以增加之後自己和別人讀的時候更好理解，也讓思考更有條理。
- 強調課程重要內容：雖然本計畫的目標主要是研究學習單對於學生習題操作的幫助，但在整個執行的過程中，學習單也幫助學生理解課程架構和連結各部分的內容。這次執行的模式，是每週上課完後批改學生的學習單，根據上課的狀況與學習單上的回應再來調整下一週的進度與內容。因此特別在跨週的課程，可能會先在學習單上預留一些位置引導學生填空上星期的重要內容，一方面當作課程的暖身，讓學生能夠主動去回憶學過的東西。一方面也清楚定位這星期教學內容的出發點，讓學生把之前學過的公式或概念寫下來，方便本次課程需要使用的時候可以隨時參閱。
- 理論推導過程：除了計算操作的部分以外，回饋問卷也把「理論推導」的部分學生的學習感受列入做比較參考。原本覺得學習單對於理論推導的效果不如習題計算部分來的好，不過從回饋的分數可以看出是不相上下的。對於是否能幫助理解的問題，分數甚至略高於習題計算。另一方面，對於是否優於講述性上課方式，回饋的分數則略低於習題計算方面。這方面對於學生的可能影響在於在理論推導的過程中，使用學習單會強制學生參與。在課堂中的觀察，學生不只是需要單純觀看推導的過程，同時也需要抓到各階段的重點寫在學習單上，因此對於推導的過程有更高的參與度。在數學系更加抽象科目的學習中，一個很重要的學習目標是讓學生學會思考並寫出一個好的推論過程。即使在這次微積分的課程中理論推導的部分和抽象學習需要的程度比起來相對淺很多，但看到學生的正面回饋，之後也可以進一步的思考如何用學習單來教導學生抽象的邏輯推論證明。

對於「習題引導」的部分，從學生的回饋可以看到平均分數都在四分以上。這表示學生普遍覺得這樣的教學模式是有幫助的。以下是這次教學經驗中，我觀察到習題引導對於學生的正

面影響：

- 背景程度的落差：同一班不同學生的數學程度落差，隨著學生年齡的成長以及學習時數的增加在一路擴大。在大學的數學課程中，學生的程度落差相當的大，許多課堂上預設學生已經了解甚至預設學生已經熟練的數學能力，可能有些學生並不具備。但數學的操作又期待學生能把之前所有學過的能力整合來得到結果。習題引導過程中一個好處是可以幫助學生把之前需要的能力或公式補起來，有些時候是在與學生一對一對話的時候，或是有些時候是發現大多數學生無法找到適合的公式或計算，而在講台上公開地給予追加提示。對於學生來說，學習一個公式或計算最好的方式是找到可以操作的地方。藉由這種作法，可以讓學生在短時間之內再次快速學習與連結之前未能精熟的內容。也因此幫助些微落後的學生能夠盡可能地追上以及補足學習所需要的背景。
- 計算錯誤的可能：在習題操作的過程中，錯誤是難免的。但是沒有被即時抓出來的錯誤，就可能讓學生對題目有奇怪的理解。有些時候學生因為犯錯導致後面計算不出來而造成巨大的挫折感。也有些時候學生犯的錯反而讓式子變得很簡單但因此對於整個題目有錯誤的理解。但無論如何，錯誤的發生會讓學生這整段練習的時間變得毫無效果。藉由習題引導的方式，最直接的好處是可以在學生計算錯誤開始走歪的時候就把它們拉回來，避免空轉以及過多的挫折感。另外一個在這個過程中的好處是可以和學生開啟數感的話題。在操作數學的過程中錯誤其實在所難免，就連我身為數學老師自己在處理問題時也有可能算錯。重點並不是不能犯錯，而是如何偵錯。趁這樣的機會也告訴學生不只是一直計算，嘗試感覺一下計算的結果。如果感覺怪怪的先停一下，驗證或者想通自己的結果是不是可信，累積足夠的信心之後再接著進入下一步。這種偵錯與數學思考的對話，是平常講述型的教學方式很難做到的面向。

建議與省思(Recommendations and Reflections)

這次使用學習單的模式可以改進的空間。

- 學習單空間不足：因為兩張以上的紙需要用可以裝訂的影印機，加上每次的習題大概都落在A4正反兩面的量上下。為了節省紙張和好處理，設計時默默地加入了一個不成文的規定：每次上課的學習單均為A4正反兩面共一張紙的狀況。以結果來說學生使用感受並不好，這也反應在問卷題目「學習單上有足夠的空間讓我計算還有整理自己的思考。」的分數以及學生回饋中有兩位提到空間不夠的部分。下次設計時需要注意以使用者的需求為主。
- 學習單沒有發回去：為了留下此次計畫可以分析的資料，以及將改完的學習單發回去會

部分占用到下一堂課的時間。這次執行的模式是每堂課結束後將學習單收回，同學們會在學習單回收之前用手機拍下這堂課的成果。藉由收回的學習單評估學生們學習情況，下堂課再口頭回應學生們上次學習單普遍的表現。因為上課已經給學生相當多的引導與回饋，學習單完成度很高，普遍錯誤滿少的，也原本覺得沒有發回去的必要。但以學生的回應來看，也許還是將改完的學習單發回的方式，可以讓學生得到更多的學習回饋。這可能反應在問卷「幫助記憶上課的內容」以及「回家之後需要更少的時間複習」以及學生建議發回學習單的部分。

- 學習單的難度設定：在批改學生的學習單時，會發現學生們對於開放性需要表達自己思考的問題（像是要學生舉出類似的例子，或者用自己的理解寫出原因）反應不佳，甚至可能會直接空白。觀察到這樣的狀況時，需要重新修正對學生們學習的期待。原本預設學生們能夠清楚的整理自己的思考並表達，但實際執行上發現學生們對於思考的整理仍然沒有自信。一個可能的處理方式是就算問開放式的問題，讓學生思考過後，仍然在投影片上打上自己對於這個問題的答案。讓學生就算沒有想法或不知道如何表達，仍然有可以模仿以及藉此學習的空間。一個重要的判準是讓學生的自在地把學期單寫完並從中得到成就感。在使用學習單時，原本我專注的部分都在於傳達了多少知識，但還是有些空間可以藉由更細緻的設計來增進學生上課的心情與成就感的。和這個相關的反思是學習單是否會限制學生的思考，就我的觀察是有這樣的影響的。使用這個方式需要評估學生本身的成熟度，像是清楚作筆記與思辨的能力。對於能夠自己清楚整理思考的學生，學習單上對於基本功還有細節的強調可能會覺得礙手礙腳，但是反過來說這一年的學生狀況，或是目前我觀察到中正大學學生普遍的狀況，都還是停留在需要訓練如何思辨與整理思考的狀況。視不同能力的學生，對於問題引導的程度也需要跟著修改。

使用習題引導的方式，雖然可以近距離的和學生互動來了解他們的狀況，但也需要改變許多之前的教學思維。

- 時間上的規劃：使用習題引導的方式，一個最大的改變就在於課堂時間的規劃，課程中讓學生做習題的時間拉長，必然會壓縮到其他部分時間的使用。剛好下學期的課程因為學校試行十六周的上課時間，就趁這個機會重新整理教學內容。需要控制習題的量，讓每一題都有更清楚的學習目標。除此之外也需要保持彈性，有些題目原本預設學生十分鐘就可以解出來，但實際執行時卻可能用到十五分鐘以上。一開始對於這樣的狀況，在習題引導的過程中看學生們的完成度不如預期會有急躁的感覺，甚至會想用引導的部分推學生的進度，或是在腦中焦慮後面的課堂時間該如何調整，哪些東西可能沒時間教。但後來學習到接受學生們的思維速度，也知道使用這些時間讓學生們好好思考是重要的。
- 進度上的規劃：在有了第一學期的經驗後，在第二學期中為了使用習題引導而重新規劃了教學進度。在之前的教學經驗，會把多變數積分放在第二學期的期中考之前，這次嘗試了盡可能地放慢教學步調，期中考之前只教了參數曲線和多變數微分。並把參數曲線

從原本兩週的時數拉到變成三週。多變數微分從原本的二週半的時數拉到變成四週（表定從第四週到第八週，但是第七週第八週因為春假各只上了一半的課。）多變數微分的部分，像是微分的應用以及同學們最容易有問題的拉格朗日法，把原本一堂的東西藉由加更多的例題，並拆成兩堂課而讓課程內容更加具體。一開始會擔心講更多的例子以及放慢進度會導致每堂課的內容太淺，但最後上課氣氛以及學生反應滿正面的。能夠這樣實行也是因為這學期的教學目標主要只有多變數微分與積分，剩下的都是自由選擇的主題。如果對於更嚴格一點的進度壓力，對於要放多少習題引導的部分就會需要更審慎的考量。

總結。以學習單與習題引導為方式，考量對於課程需付出的時間心力，在未來教學上使用的可行性分析：

- 學習單的部分：學習單的使用有之前提過的像是讓學生更清楚理解課程結構、節省課程時間、加強學生整理資料能力的優點。但相對的需要付出的心力包含課前編寫學習單，以及課後修改學習單的部分。這次計劃因為自己本身有之前多年教學微積分的經驗，因此可以從之前已經熟悉的教學節奏以及習題出發。相對於我同時間教授的線性代數，因為是第一次教，所有的備課內容都是從頭開始，較難掌握教學步調。也因此很難在第一次教授的課就一次同時把學習單準備到位。課後學習單也需要額外的人力批改，這次班上因為人數不多，比較能夠有足夠的時間心力來批改。如果是更大的班級或者同時教授多班，需要讓助教來負擔批改的工作，但也因此需要仰賴助教能夠給予學生回饋的能力。

整體來說，若成功建立了搭配課程的學習單，可以一勞永逸的使用在之後的課程中來增進教學的效果，但對於初期準備課程時需要付出的心力會比較大。對於新課程，也許先把時間心力花在課程內容以及呈現上，在多教幾次後再建立學習單的部分會較為適合。

- 習題引導的部分：習題引導的優點在於可以即時知道學生的狀況並反饋、建立現場操作現場思考的班級文化、並在計算錯誤的部分降低學生的挫折感。因為主要在於課程時間規劃的不同，放給學生操作的時間比例增加，但因為改動的只有上課的方式，付出的時間心力沒有顯著的差異，若班級人較多時，往往是規劃一個題目學生需要多少時間做，然後下去引導學生的學習平均分配時間給每位學生或是有特別需要幫助的學生。即使人多的時候學生分到的時間較少，但還是能夠很有效率的掌握學生的學習狀況。在其他課程中，也嘗試過沒有搭配學習單的操作方式，改為讓學生自己準備計算紙與筆現場做題目，除了需要建立帶計算紙與筆現場算的文化以外，其實差異不大。

目前因為這個方式效益不錯，並且對於需要的時間心力沒有顯著改變。現在在我其他教授的課程中，也會使用習題引導的方式。也可以藉著對於學生的觀察，讓自己的教學更符合學生的程度與需要。

參考文獻

論文：

- 《Memory: A Contribution to Experimental Psychology.》 Ebbinghaus, Hermann (1913)
- 《Exploring the role of exemplarity in education: two dimensions of the teacher's task》 Morten Timmermann Korsgaard(2019)
- 《Modelling of forgetting curves in educational environment》 Paweł Plaskura(2019)
- 《The effect of flipped learning on academic performance as an innovative method for overcoming Ebbinghaus' forgetting curve》 Bo Ae Chun, Hae Ja Heo(2018)

書籍：

- 《學習的 26 種方法：啟發孩子更好懂的史丹佛基礎教育指南》 Schwartz, Tsang, Blair

網站：

- 《Forgetting curve》 https://en.wikipedia.org/wiki/Forgetting_curve

《【個人學習】學了就忘？了解遺忘曲線 提升大腦長期記憶！》

https://www.asiabusinessleaders.com/2021/06/21/%E9%81%BA%E5%BF%98%E6%9B%B2%E7%B7%9A?fbclid=IwAR2q831mir5Aw--ydU794hh1XVxf4qf_rqPts2hs4C7p22OToGAEXQEST_0

《艾賓豪斯的遺忘曲線》

<https://memobank.pixnet.net/blog/post/24950161?fbclid=IwAR1k16UCXgcHjAMekoBcGVa00hrDeV95v6Yh6csQCpUzsn7gVQCPHO7EIWY>